



UNITÉ DE RECHERCHE  
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
B.P. 105

78153 Le Chesnay Cedex  
France

Tél. (1) 39 63 55 11

# Rapports de Recherche

N° 772

## UN THEOREME DE TRACES DANS UN ESPACE DE SOBOLEV ANISOTROPE

Patrick JOLY

DECEMBRE 1987

UN THEOREME DE TRACES DANS  
UN ESPACE DE SOBOLEV ANISOTROPE

\*\*\*\*\*

A TRACE THEOREM IN AN  
ANISOTROPIC SOBOLEV SPACE

*Patrick JOLY*

## **RESUME**

Dans cet article, nous établissons un théorème de traces dans un espace de Sobolev anisotrope en dimension 2. L'espace des traces est entièrement caractérisé comme somme directe de deux espaces  $L^2$  à poids. On donne enfin un sens précis à la formule de Green dans cet espace.

## **MOTS CLES**

Espace de Sobolev anisotrope - Théorème de trace - Espace  $L^2$  à poids - Formule de Green.

## **ABSTRACT**

In this paper, we prove a trace theorem in an anisotropic Sobolev space in dimension 2. The trace space is completely characterized as the sum of two weighted  $L^2$ -spaces and one gives a sense to the Green's formula in this space.

## **KEY WORDS**

Anisotropic Sobolev space - Trace theorem - Weighted  $L^2$  space - Green's formula.

UN THEOREME DE TRACES DANS  
UN ESPACE DE SOBOLEV ANISOTROPE

*Patrick JOLY*

# UN THEOREME DE TRACES DANS UN ESPACE DE SOBOLEV ANISOTROPE

## INTRODUCTION

Dans les espaces de Sobolev usuels, type  $H^m(\Omega)$  ou  $W^{m,p}(\Omega)$ , toutes les dérivées dans toutes les directions jouent un rôle identique. Ceci explique que seules les propriétés de régularité de la frontière  $(\Gamma)$  du domaine  $\Omega$  jouent un rôle dans les résultats de trace ou de prolongement (voir les références classiques [1], [8], [10]). Dans certains domaines de la physique, on rencontre des équations aux dérivées partielles qui amènent à travailler dans des espaces fonctionnels où seules les dérivées partielles dans certaines directions jouent un rôle privilégié. C'est notamment le cas des approximations paraxiales de l'équation des ondes (voir [2], [3], [5]) ou des équations de Stokes [9]. L'exemple le plus simple est celui de l'approximation parabolique de l'équation des ondes qui en dimension 2, s'écrit :

$$(0.1) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( c \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) = 0$$

A l'équation (0.1) est associée la conservation de l'énergie :

$$(0.2) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \frac{dx}{c} + \frac{1}{4} \int_{\Omega} c \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 dx$$

ce qui amène naturellement à travailler dans l'espace de Sobolev anisotrope :

$$(0.3) \quad H^{1,0}(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega) / \frac{\partial v}{\partial x_1} \in L^2(\Omega) \} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Concernant les théorèmes de traces relatifs aux espaces du type (0.3), la situation est bien connue dans le cas où  $\Omega$  est un ouvert produit ([8]). Le cas où  $\Omega$  est un ouvert "quelconque" apparaît comme beaucoup plus délicat. On peut toutefois trouver un résultat simple mais insuffisant pour notre propos, dans TEMAM ([11]).

Dans cet article, nous nous proposons de traiter complètement le cas de l'espace  $H^{1,0}(\Omega)$  en dimension 2. Le plan que nous suivrons est le suivant. Au paragraphe 1, nous énonçons nos deux principaux résultats (théorèmes 1.1 et 1.2).

Le premier est le théorème de traces pour  $H^{1,0}(\Omega)$ , le second concerne la formule de Green associée. Le paragraphe 2 est consacré à la démonstration détaillée de ces deux résultats. Nous signalons quelques problèmes ouverts au paragraphe 3.

L'intérêt de ce travail réside d'avantage, à notre avis, dans la nature même du résultat, assez surprenant surtout par comparaison avec les résultats classiques, que dans les techniques utilisées qui restent assez rudimentaires. (Il s'agit essentiellement de variations autour de l'inégalité de Poincaré en dimension 1). Il est notamment frappant de noter que ce sont plus l'orientation de la frontière  $(\Gamma)$  par rapport à la direction  $x_2$  et la position relative de  $(\Omega)$  par rapport à  $(\Gamma)$ , et non la régularité elle-même de cette frontière, qui influent sur la nature du résultat. Ainsi, même lorsque  $(\Gamma)$  est très régulière,  $H^{1,0}(\Omega)$  ne possède pas en général, la propriété de prolongement contrairement à  $H^1(\Omega)$ . Signalons enfin qu'une utilisation de ces résultats pour l'étude de la régularité des solutions des approximations paraxiales de l'équation des ondes peut être trouvée dans [6] et [7].

En ce qui concerne les théorèmes d'inclusion, de compacité et de densité sur les espaces de Sobolev anisotropes, signalons qu'une étude extrêmement complète est menée dans le livre de BESOV, IL'JIN et NIKOLSKII ([4]).

## 1 - LES DEUX RESULTATS PRINCIPAUX

Pour énoncer nos résultats, il est nécessaire de préciser les hypothèses que nous considérons et de donner quelques définitions de notions qui nous seront utiles par la suite. Dans tout ce qui suit,  $\Omega$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $(\Gamma)$ . Nous ferons sur  $(\Gamma)$  l'hypothèse de régularité :

(H1)  $(\Gamma)$  est une courbe lipschitzienne.

On peut donc orienter et paramétrer  $(\Gamma)$  par une abscisse curviligne  $\sigma$  et nous désignerons par  $d\sigma$  la mesure superficielle de  $(\Gamma)$ . En presque tout point  $M(\sigma)$ ,  $(\Gamma)$  admet un vecteur unitaire normal  $n(\sigma) = (n_1(\sigma), n_2(\sigma))$  sortant par rapport à  $\Omega$ . Cela nous permet de partitionner  $(\Gamma)$  en :  $(\Gamma) = (\Gamma_0) \cup (\Gamma_1)$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Gamma_1) = \{M(\sigma) = (X_1(\sigma), X_2(\sigma)) \in (\Gamma)/n_1(\sigma) \neq 0\} \\ (\Gamma_0) = \{M(\sigma) = (X_1(\sigma), X_2(\sigma)) \in (\Gamma)/n_1(\sigma) = 0\} \end{array} \right.$$

Nous introduisons maintenant la notion de point  $x_2$ -extrémal :

**Définition 1**

$M(\sigma)$  est un point  $x_2$ -extrémal de  $(\Gamma)$  si il existe  $\epsilon(\sigma) > 0$  tel que

$$n_1(\sigma - \eta) \cdot n_1(\sigma + \eta) \leq 0 \quad \text{p.p. } \eta < \epsilon(\sigma)$$

Ce point  $x_2$ -extrémal est dit strict si

$$n_1(\sigma - \eta) \cdot n_1(\sigma + \eta) < 0 \quad \text{p.p. } \eta < \epsilon(\sigma)$$

A titre d'exemple, citons le cas où la frontière  $(\Gamma)$  coïncide localement avec le graphe d'une fonction

$$x_2 = f(x_1) \quad f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$$

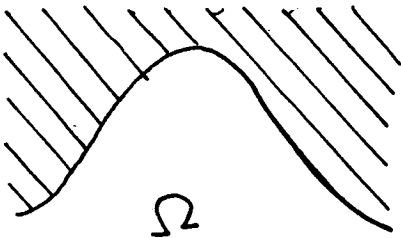
qui admet un extremum qui coïncide avec  $M(\sigma)$ . Nous aurons besoin de distinguer les points  $x_2$ -extrémaux stricts sortants (par rapport à  $\Omega$ ) et les points  $x_2$ -extrémaux stricts rentrants grâce à la définition suivante :

**Définition 2**

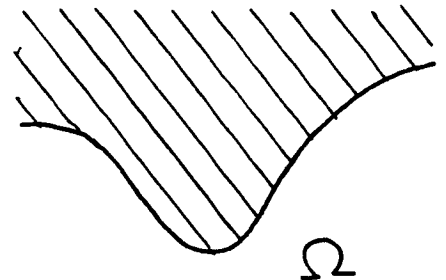
Soit  $M(\sigma)$  un point  $x_2$ -extrémal strict de  $(\Gamma)$  et soit  $C_\rho$  le cercle de centre  $M(\sigma)$  de rayon  $\rho$ ,  $M(\sigma)$  est sortant par rapport à  $\Omega$  si et seulement si, pour  $\rho$  assez petit la mesure angulaire de l'arc  $\Omega \cap C_\rho$  est strictement inférieure à  $\pi$ .  $M(\sigma)$  est dit rentrant sinon.

On notera que la notion de point  $x_2$ -extrémal fait intervenir l'orientation de la frontière  $(\Gamma)$  relativement à la direction  $0x_2$  alors que la notion de point  $x_2$ -extrémal sortant (où rentrant) fait intervenir la position relative de  $\Omega$  par rapport à  $(\Gamma)$ .

**Illustration graphique**



Point  $x_2$ -extrémal sortant

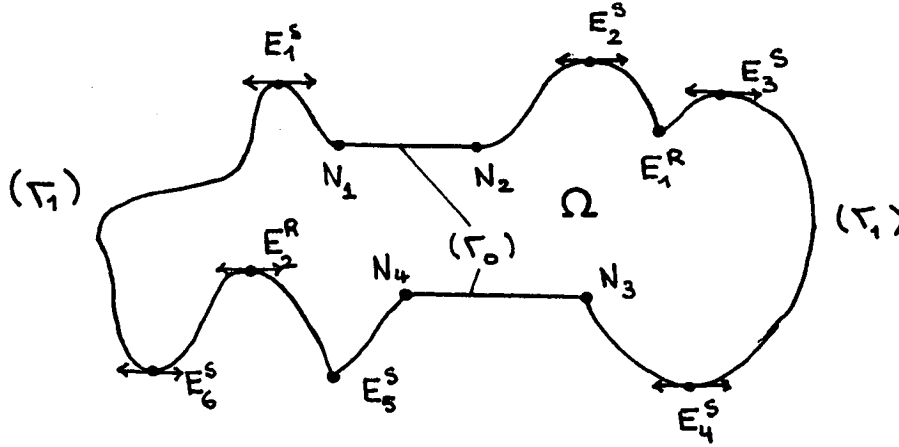


Point  $x_2$ -extrémal rentrant

Nous ferons dans la suite l'hypothèse :

$$(H2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\Gamma) \text{ ne possède qu'un nombre fini de points} \\ x_2\text{-extrémaux stricts } \{M(\sigma_j), 1 \leq j \leq N\} \end{array} \right.$$

### Illustration



- $(N_1, N_2, N_3, N_4)$  : point extrémaux non stricts de  $\Gamma_1$
- $(E_1^S, E_2^S, E_3^S, E_4^S, E_5^S, E_6^S)$  : points  $x_2$ -extrémaux stricts sortants
- $(E_1^R, E_2^R)$  : points  $x_2$ -extrémaux stricts rentrants

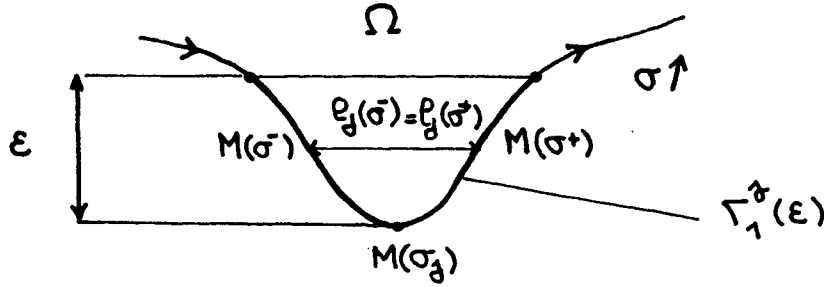
Avec cette hypothèse nous pouvons alors trouver  $\epsilon > 0$  assez petit ainsi que  $\sigma_j^-(\epsilon), \sigma_j^+(\epsilon)$  tels que  $\sigma_j^-(\epsilon) < \sigma_j < \sigma_j^+(\epsilon)$  pour lesquels : (voir paragraphe 2 et figure ci-dessous).

- $\Gamma_1^j(\epsilon) = \{M(\sigma) = (X_1(\sigma), X_2(\sigma)), \sigma \in ]\sigma_j^-(\epsilon), \sigma_j^+(\epsilon)[\} \subset \Gamma_1$
- $X_2(\sigma_j^-(\epsilon)) = X_2(\sigma_j^+(\epsilon)) = X_2(\sigma_j) \pm \epsilon$
- $\sigma \rightarrow X_2(\sigma)$  est monotone sur  $[\sigma_j^-(\epsilon), \sigma_j]$  et  $[\sigma_j, \sigma_j^+(\epsilon)]$
- Pour  $X_2 \neq X_2(\sigma_j)$ ,  $\exists! (\sigma^-, \sigma^+) \in [\sigma_j^-(\epsilon), \sigma_j[ \times ]\sigma_j, \sigma_j^+(\epsilon)] / X_2(\sigma^-) = X_2(\sigma^+) = X_2$

Nous pouvons alors définir la fonction

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \ell_j(\sigma) : [\sigma_j^-(\epsilon), \sigma_j^+(\epsilon)] \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \ell_j(\sigma^-) = \ell_j(\sigma^+) = |X_1(\sigma^+) - X_1(\sigma^-)| \text{ où } X_2(\sigma^-) = X_2(\sigma^+) \end{array} \right.$$



Illustration graphique

On notera que  $l_j(\sigma)$  est une fonction continue de  $\sigma$  qui satisfait :

$$(1.2) \quad \begin{cases} l_j(\sigma) > 0 & \forall \sigma \neq \sigma_j \\ \lim_{\sigma \rightarrow \sigma_j} l_j(\sigma) = 0 \end{cases}$$

En un certain sens, la singularité de  $\frac{1}{l_j(\sigma)}$  au voisinage de  $\sigma = \sigma_j$  mesure le "resserrement" de l'ouvert  $\Omega$  au voisinage du point  $x_2$ -extrémal sortant  $M(\sigma_j)$  (voir [5] pour plus de précision).

Soit alors  $\phi(\sigma)$  une fonction définie (presque partout) sur  $\Gamma$ , nous dirons que :

$$(1.3) \quad \begin{cases} \bullet \phi(\sigma) \text{ est } (\Gamma, x_1)\text{-paire au voisinage de } M(\sigma_j) \text{ si et seulement si,} \\ \text{pour } (\sigma^-, \sigma^+) \in [\sigma_j^-(\epsilon), \sigma_j^-] \times [\sigma_j^+, \sigma_j^+(\epsilon)] \\ X_2(\sigma^-) = X_2(\sigma^+) \Rightarrow \phi(\sigma^-) = \phi(\sigma^+) \quad (\text{p.p.}) \\ \bullet \phi(\sigma) \text{ est } (\Gamma, x_1)\text{-impaire au voisinage de } M(\sigma_j) \text{ si et seulement} \\ \text{si, pour } \sigma \in [\sigma_j^-(\epsilon), \sigma_j^+(\epsilon)] : \\ X_2(\sigma^-) = X_2(\sigma^+) \Rightarrow \phi(\sigma^-) + \phi(\sigma^+) = 0 \quad (\text{p.p.}) \end{cases}$$

On remarquera que toute fonction  $\phi(\sigma)$  peut se décomposer, de manière unique, sur  $\Gamma_1^j(\epsilon)$  en la somme d'une partie  $(\Gamma, x_1)$ -paire et d'une partie  $(\Gamma, x_1)$ -impaire.

Nous introduisons alors l'espace fonctionnel :

$$T(\Gamma_1^j(\epsilon)) = PL^2(\Gamma_1^j(\epsilon); l_j(\sigma) | n_1(\sigma) | d\sigma) + IL^2(\Gamma_1^j(\epsilon); l_j^{-1}(\sigma) | n_1(\sigma) | d\sigma)$$

$$PL^2(\Gamma_1^j(\epsilon); l_j(\sigma) | n_1(\sigma) | d\sigma) = \left\{ \phi \in L^2(\Gamma_1^j(\epsilon); l_j(\sigma) | n_1(\sigma) | d\sigma) / X_2(\sigma^-) = X_2(\sigma^+) \Rightarrow \phi(\sigma^-) = \phi(\sigma^+) \right\}$$

$$IL^2(\Gamma_1^j(\epsilon); l_j^{-1}(\sigma) | n_1(\sigma) | d\sigma) = \left\{ \phi \in L^2(\Gamma_1^j(\epsilon); l_j^{-1}(\sigma) | n_1(\sigma) | d\sigma) / X_2(\sigma^-) = X_2(\sigma^+) \Rightarrow \phi(\sigma^-) + \phi(\sigma^+) = 0 \right\}$$

où de façon générale, si  $m(\sigma)$  désigne une fonction presque partout strictement positive, nous avons défini, pour  $C \subset \Gamma_1$

$$(1.4) \quad L^2(C; m(\sigma)d\sigma) = \left\{ \phi(\sigma) / \int_C |\phi(\sigma)|^2 m(\sigma) d\sigma \right\}$$

espace de Hilbert pour la norme

$$(1.5) \quad \|\phi\|_{m,C}^2 = \left( \int_C |\phi(\sigma)|^2 m(\sigma) d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}$$

On munit alors  $T(\Gamma_j(\epsilon))$  d'une structure d'espace de Hilbert avec la norme

$$(1.6) \quad \|\phi\|_{T(\Gamma_1^j(\epsilon))}^2 = \|\phi_p\|_{\ell_j^2 |n_1|, \Gamma_1^j(\epsilon)}^2 + \|\phi_i\|_{\ell_j^{-1} |n_1|, \Gamma_1^j(\epsilon)}^2$$

où  $\phi = \phi_p + \phi_i$  désigne la décomposition unique en parties paire et impaire de  $\phi$ . On notera que la partie  $(\Gamma, x_1)$ -impaire d'une fonction de  $T(\Gamma_1^j(\epsilon))$  est moins "singulière" que sa partie paire.

Si nous désignons maintenant par  $X_j^\epsilon(\sigma)$  la fonction indicatrice de l'intervalle  $[\sigma_j^-(\epsilon), \sigma_j^+(\epsilon)]$ , nous savons définir l'espace de fonctions définies sur la partie  $\Gamma_1$  de la frontière  $(\Gamma)$  :

$$(1.7) \quad T(\Gamma_1, \Omega) = \left\{ \phi : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R} / X_j^\epsilon \phi \in T(\Gamma_1^j(\epsilon)), 1 \leq j \leq n; (1 - \sum_{j=1}^n X_j^\epsilon) \phi \in L^2(\Gamma_1; |n_1(\sigma)| d\sigma) \right\}$$

qui est un espace de Hilbert muni de la norme :

$$(1.8) \quad \|\phi\|_{T(\Gamma_1, \Omega)}^2 = \|(1 - \sum_{j=1}^n X_j^\epsilon) \phi\|_{|n_1|, \Gamma_1}^2 + \sum_{j=1}^n \|X_j^\epsilon \phi\|_{T(\Gamma_1^j(\epsilon))}^2$$

A priori, l'espace  $T(\Gamma_1, \Omega)$  défini par (1.7) dépend de  $\epsilon$ . En fait, la norme (1.8) dépend de  $\epsilon$  mais la topologie induite par cette norme est indépendante de  $\epsilon$  (en d'autres termes deux normes définies avec  $\epsilon$  et  $\epsilon'$  sont équivalentes) de telle sorte que  $T(\Gamma_1, \Omega)$  est bien indépendant de  $\epsilon$ . En revanche cet espace n'est pas lié

intrinséquement à la courbe  $(\Gamma_1)$  mais bien au couple  $(\Gamma_1, \Omega)$  puisque les points  $x_2$ -extrémaux stricts sortants interviennent de façon essentielle dans la définition de  $T(\Gamma_1, \Omega)$ .

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le :

**THEOREME 1.1** | L'application trace  $\gamma_0 : D(\bar{\Omega}) \rightarrow L^2(\Gamma_1)$  définie par  $(\gamma_0 u)(\sigma) = u(M(\sigma))$  se prolonge de manière unique en une application linéaire continue, toujours notée  $\gamma_0$ , de  $H^{1,0}(\Omega)$  dans  $T(\Gamma_1, \Omega)$ . En outre, l'application  $\gamma_0$  est surjective de  $H^{1,p}(\Omega)$  dans  $T(\Gamma_1, \Omega)$

Signalons tout de suite une conséquence immédiate de ce résultat. Pour cela nous introduisons l'ouvert

$$O = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$$

Il est alors clair que les espaces  $T(\Gamma_1, \Omega)$  et  $T(\Gamma_1, O)$  ne coïncident que si  $\Gamma_1$  ne présente aucun point  $x_2$ -extrémal strict (en effet, tout point  $x_2$ -extrémal sortant par rapport à  $\Omega$  est rentrant par rapport à  $O$  et réciproquement. Par conséquent nous avons le :

**COROLLAIRE 1.1** | L'espace  $H^{1,p}(\Omega)$  possède la propriété de prolongement si et seulement si la courbe  $(\Gamma_1)$  ne présente pas de points  $x_2$ -extrémaux stricts.

Notons que les ouverts sans point  $x_2$ -extrémal strict excluent par exemple le disque mais pas le carré unité !

Il est intéressant d'apporter quelques commentaires sur le résultat du théorème 1.1. On constate que :

- les traces d'une fonction de  $H^{1,0}(\Omega)$  ne peuvent être définies que sur la partie  $\Gamma_1$  de la frontière  $\Gamma$ .

- ces traces peuvent présenter des singularités plus fortes que les singularités  $L^2$  au voisinage des points  $x_2$ -extrémaux à cause des poids  $|n_1(\sigma)|$  et  $\ell_j(\sigma)$

- la singularité est susceptible d'être plus forte au voisinage d'un point  $x_2$ -extrémal strict sortant.

- toutefois cette dernière singularité ne peut affecter que la partie  $(\Gamma, x_1)$  impaire doit elle être beaucoup plus régulière au voisinage du point  $x_2$ -extrémal sortant à cause du poids  $\ell_j(\sigma)^{-1}$ . Cette condition traduit une sorte de "raccord" de la trace au point extrémal qui reflète ainsi l'effet de la régularité de la fonction dans la direction  $x_1$ .

Notre second théorème va expliciter, comment la formule de Green classique :

$$(1.9) \quad \int_{\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_1} v \right) dx = \int u v n_1 d\sigma \quad \forall (u, v) \in D(\bar{\Omega})^2$$

se prolonge pour des fonctions de  $H^{1,0}(\Omega)$ . Pour cela nous sommes amenés à définir la notion de valeur principale d'une intégrale curviligne sur  $\Gamma$  dans la direction  $x_2$ . Nous poserons, pour  $\delta > 0$  assez petit

$$(1.10) \quad \Gamma_1(\delta) = \bigcup_{j=1}^N \Gamma_1^j(\delta)$$

### THEOREME 1.2

(i) Pour tout couple  $(\phi, \psi)$  dans  $T(\Gamma_1, \Omega)^2$ , la limite suivante :

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\Gamma_1 \setminus \Gamma_1(\delta)} \phi(\sigma) \psi(\sigma) n_1(\sigma) d\sigma = \text{v.p. } x_2 \int_{\Gamma_1} \phi(\sigma) \psi(\sigma) n_1(\sigma) d\sigma$$

existe et la forme bilinéaire  $(\phi, \psi) \rightarrow \text{v.p. } x_2 \int_{\Gamma_1} \phi(\sigma) \psi(\sigma) n_1(\sigma) d\sigma$  est continue sur  $T(\Gamma_1, \Omega)^2$ .

(ii) On a dans  $H^{1,0}(\Omega)$  la formule de Green suivante

$$(1.11) \quad \int_{\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_1} v \right) dx = \text{v.p. } x_2 \int_{\Gamma_1} (\gamma_0 u)(\sigma) (\gamma_0 v)(\sigma) n_1(\sigma) d\sigma$$

$$\forall (u, v) \in H^{1,0}(\Omega)^2$$

## 2 - DEMONSTRATION DES DEUX RESULTATS PRINCIPAUX

### 2.1 - Preuve du théorème 1.1

Plutôt que donner une démonstration directe, nous avons préféré décomposer celle-ci en plusieurs lemmes. Cette démarche présente à nos yeux l'avantage d'être assez didactique et illustre assez bien la nécessité d'introduire les différentes notions introduites au paragraphe 1.

En guise de préliminaire, signalons qu'un résultat simple, qu'on peut trouver dans [11] par exemple, s'énonce ainsi :

#### THEOREME 2.1

*L'application  $\gamma_{n_1} : D(\bar{\Omega}) \rightarrow L^2(\Gamma)$  définie par  $(\gamma_{n_1} u)(\sigma) = n_1(\sigma)u(M(\sigma))$  se prolonge de manière unique en une application linéaire continue de  $H^{1,0}(\Omega)$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$  et on a la formule de Green :*

$$(2.1) \quad \forall (u, v) \in H^{1,0}(\Omega) \times H^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} v + u \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) dx = \langle \gamma_{n_1} u, \gamma_0 v \rangle_{\Gamma}$$

Démonstration Il suffit de remarquer que  $u \in H^{1,0}(\Omega)$  équivaut à  $\vec{u} = (u, 0)$  dans  $H(\text{div}, \Omega)$  et d'utiliser le théorème de traces usuel de  $H(\text{div}, \Omega)$ .  $\square$

Ce résultat n'est pas complètement satisfaisant. En effet, dans la formule (2.1),  $u$  et  $v$  jouent un rôle dissymétrique alors que le membre de droite est parfaitement symétrique. De plus, on n'a de renseignement que sur la trace du produit  $n_1 \times u$  et non sur celle de la fonction  $u$  elle même. En particulier comme  $n_1 \equiv 0$  sur  $\Gamma_0$ , on s'aperçoit que l'on ne peut espérer définir la trace de  $u$  sur  $\Gamma_0$ . Ceci est d'ailleurs clair : rien n'étant imposé dans la direction  $x_2$ , une fonction de  $H^{1,0}(\Omega)$  peut être parfaitement discontinue le long d'une droite  $x_2 = \text{cste}$ .

Dans ce qui suit, notre but sera précisément de montrer que l'on peut effectivement définir la trace de  $u$  en tant que fonction presque partout définie sur  $\Gamma_1$  et, afin de garantir l'optimalité de notre résultat, de caractériser l'espace image. Par souci de clarté dans l'exposé, nous distinguerons donc plusieurs étapes :

#### 1 Cas où le signe de $n_1(\sigma)$ est invariant le long de $(\Gamma)$

**LEMME 2.1**

Si  $n_1(\sigma)$  garde un signe constant sur  $\Gamma_1$ , l'application trace  $\gamma_0 : D(\bar{\Omega}) \rightarrow L^2(\Gamma_1)$  se prolonge de manière unique en une application linéaire continue et surjective de  $H^{1,0}(\Omega)$  dans  $L^2(\Gamma_1; |n_1(\sigma)| d\sigma)$  et on a :

$$(i) \forall (u, v) \in H^{1,0}(\Omega)^2 \quad \int_{\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_1} v \right) dx = \int_{\Gamma_1} \gamma_0 u \gamma_0 v n_1 d\sigma$$

$$(ii) \forall u \in H^{1,0}(\Omega) \quad \|\gamma_0 u\|_{n_1, \Gamma_1} \leq \|u\|_{H^{1,0}(\Omega)}$$

**Démonstration du lemme**

Lorsque l'on fait  $u=v$  dans la formule de Green habituelle on obtient

$$\forall u \in D(\bar{\Omega}) \quad \int_{\Gamma_1} |u|^2 n_1(\sigma) d\sigma = \int_{\Omega} u \frac{\partial u}{\partial x_1} dx$$

Il suffit alors de remarquer que, comme le signe de  $n_1(\sigma)$  est constant, le terme de gauche représente au signe près le carré de la norme de  $\gamma_0 u$  dans  $L^2(\Gamma_1, |n_1(\sigma)| d\sigma)$  et d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour majorer le terme de droite pour obtenir :

$$(2.3) \quad \forall u \in D(\Omega) \quad \|\gamma_0 u\|_{n_1, \Gamma_1}^2 \leq \|u\|_{H^{1,0}(\Omega)}^2$$

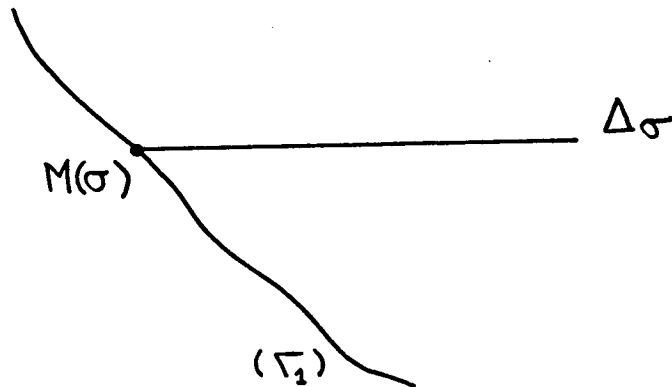
Alors, par densité et continuité, on déduit de (2.3) le résultat de prolongement unique ainsi que l'identité (i) et l'inégalité (ii).

Pour obtenir le résultat de surjectivité nous remarquons que, avec l'hypothèse sur le signe de  $n_1(\sigma)$  on peut écrire  $\Omega$  comme la réunion de demi-droites. Par exemple, si  $n_1(\sigma) \leq 0$  :

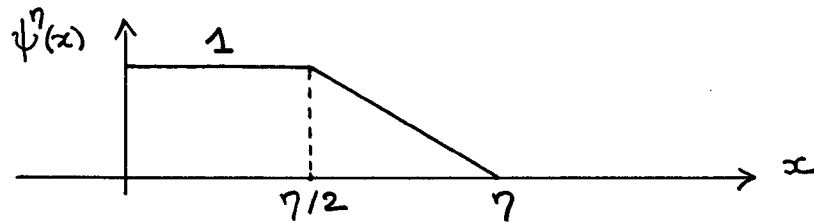
$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega = \bigcup_{M(\sigma) \in \Gamma_1} \Delta_{\sigma} \quad (M(\sigma) = (X_1(\sigma), X_2(\sigma)), \sigma \in \Sigma_1) \\ \Delta_{\sigma} = \{(x_1, X_2(\sigma)), x_1 \geq X_1(\sigma)\} \end{array} \right.$$

Considérons alors  $\phi(\sigma)$  dans  $L^2(\Gamma_1, |n_1(\sigma)| d\sigma)$ , comme  $|n_1(\sigma)| = \left| \frac{dX_2}{d\sigma}(\sigma) \right|$ , nous avons :

$$(2.5) \quad \|\phi\|_{|n_1|, \Gamma_1}^2 = \int |\phi(\sigma)|^2 \left| \frac{dX_2}{d\sigma}(\sigma) \right| d\sigma$$

Illustration graphique

Soit alors  $I_1 = \{x_2 = X_2(\sigma) / M(\sigma) \in \Gamma_1\}$ , d'après l'hypothèse sur  $n_1(\sigma)$ , l'application  $\sigma \rightarrow x_2(\sigma)$  est une application bijective de  $I_1$  dans  $\Sigma_1$  et par conséquent admet un inverse  $\sigma^{-1}(x_2)$ . Soit alors  $\psi^\eta(x)$  la fonction définie ci-dessous (par exemple):



Nous construisons alors le relèvement :

$$(2.6) \quad u(x_1, x_2) = \phi(\sigma) \psi^\eta(x_1 - X_1(\sigma)) \quad \text{avec } x_2 = X_2(\sigma)$$

Evaluons l'intégrale  $\int_{\Omega} |u|^2 dx$  à l'aide du changement de variable : (de Jacobien  $|n_1(\sigma)|$ )

$$(x_1, \sigma) \rightarrow (x_1, x_2 = X_2(\sigma))$$

Il vient, par Fubini :

$$(2.7) \quad \left| \begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x_1, x_2)|^2 dx &= \int_I \left( \int_{X_1(\sigma)}^{+\infty} |\psi^\eta(x_1 - X_1(\sigma))|^2 dx_1 \right) |\phi(\sigma)|^2 n_1(\sigma) d\sigma \\ &= \|\psi^\eta\|_{L^2}^2 \|\phi\|_{|n_1|, \Gamma_1}^2 \end{aligned} \right|$$

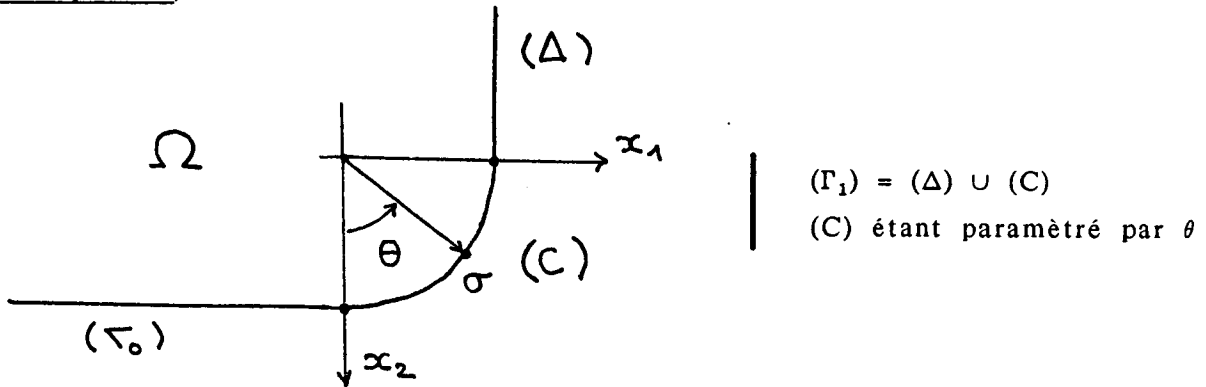
En procédant de la même manière pour  $\frac{\partial u}{\partial x_1}$  nous obtenons :

$$(2.8) \quad \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right|^2 dx = \left\| \frac{d\psi^\eta}{dx} \right\|_{L^2}^2 \|\phi\|_{|n_1|, \Gamma_1}^2$$

(2.7) et (2.8) prouvent que l'application  $\phi \rightarrow u$  ainsi construite est un opérateur de relèvement continu de  $L^2(\Gamma_1, |n_1(\sigma)| d\sigma)$  dans  $H^{1,0}(\Omega)$   $\square$

Remarque : Notons que, et nous utiliserons cette propriété pour le lemme 2.2, on peut en jouant sur le paramètre  $\eta$ , localiser arbitrairement le relèvement au voisinage de la frontière  $\Gamma_1$ .

Nous pouvons illustrer l'optimalité du résultat précédent par l'exemple suivant (exemple 1.1)



Avec le paramétrage par  $\theta$  on vérifie que  $(n_1(\sigma) = \sin\theta)$  :

$$(2.9) \quad L^2(C; |n_1(\sigma)| d\sigma) \equiv \left\{ g(\theta) : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} : \int_0^{\frac{\pi}{2}} |g(\theta)|^2 \sin\theta d\theta < +\infty \right\}$$

Alors, considérons la fonction :

$$(2.10) \quad \left| \begin{array}{l} u_\alpha(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2) \cdot \frac{1}{x_2^\alpha} \\ \psi \in D(\Omega), \psi \equiv 1 \text{ au voisinage de } (C) \end{array} \right.$$

dont la trace sur  $C$  peut être identifiée à :



$$(2.11) \quad g_\alpha(\theta) = (\sin \theta)^{-\alpha}$$

On vérifie alors immédiatement que :

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \bullet & u_\alpha \in H^{1,0}(\Omega) \quad \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{2} \\ \bullet & g_\alpha \in L^2(C, |n_1(\sigma)| d\sigma) \quad \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

## 2 Cas où $\Gamma_1$ ne possède pas de point $x_2$ -extrémaux stricts

Pour traiter ce cas, nous passerons par un résultat général qui nous sera utile par la suite. Pour cela, si  $\{M_j, 1 \leq j \leq N\}$  désigne l'ensemble des points extrémaux stricts de  $\Gamma_1$  (sortants ou rentrants) nous définissons par  $B_j(\rho)$  la boule de centre  $M_j$  de rayon  $\rho$  et nous posons :

$$(2.13) \quad \tilde{\Gamma}_1^\rho = \Gamma_1 \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_j B_j(\rho))$$

Nous avons dans le cas le

### LEMME 2.2

Pour tout  $\rho > 0$  assez petit l'application trace  $\gamma_0$  se prolonge en une application linéaire continue et surjective de  $H^{1,0}(\Omega)$  dans  $L^2(\tilde{\Gamma}_1^\rho; |n_1(\sigma)| d\sigma)$

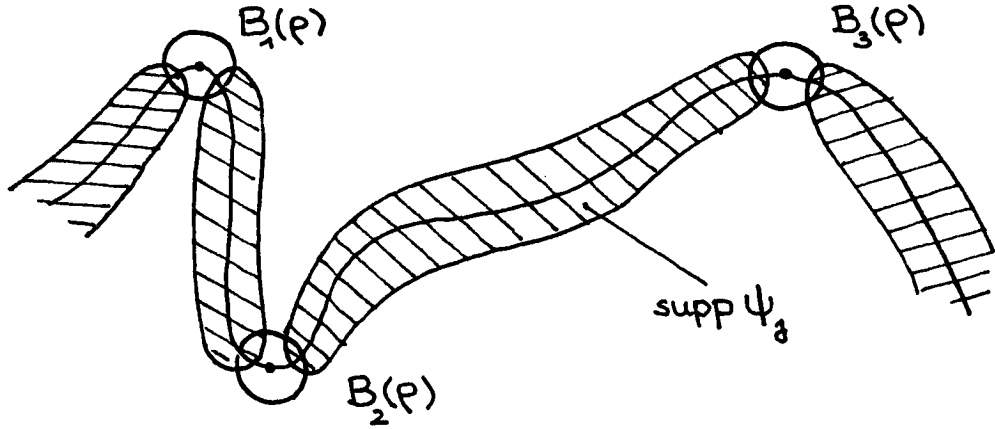
### Démonstration

On peut décomposer  $\tilde{\Gamma}_1^\rho$  en  $N+1$  composantes connexes  $\{(\tilde{\Gamma}_1^\rho)_j, 1 \leq j \leq N+1\}$ ,  $n_1(\sigma)$  gardant un signe constant le long de chaque  $(\tilde{\Gamma}_1^\rho)_j$ . Nous introduisons alors :

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \psi_j^\rho \in D(\mathbb{R}^2), 0 \leq \psi_j^\rho \leq 1 & 1 \leq j \leq N+1 \\ \psi_j^\rho \equiv 1 & \text{sur la composante } (\tilde{\Gamma}_1^\rho)_j \\ \text{supp } \psi_j^\rho \cap \text{supp } \psi_\ell^\rho = \emptyset & \text{pour } j \neq \ell \end{array} \right.$$

Ainsi sur  $\tilde{\Gamma}_1^\rho$ ,  $\sum_{j=1}^{N+1} \psi_j^\rho \equiv 1$  et l'on peut écrire

$$\forall u \in D(\bar{\Omega}) \quad \|u\|_{|n_1|, \tilde{\Gamma}_j^\rho}^2 = \sum_{j=1}^{N+1} \|\psi_j^\rho u\|_{|n_1|, \tilde{\Gamma}_1^\rho}^2$$

Illustration graphique

Nous appliquons maintenant la formule de Green à chacune des fonctions  $\psi_j^\rho u$  :

$$\left| \int_{(\tilde{\Gamma}_1^\rho)_j} |\psi_j^\rho u|^2 |n_1| \, d\sigma = 2 \left| \int_{\Omega} \psi_j^\rho u \frac{\partial}{\partial x_1} (\psi_j^\rho u) \, dx \right| \right.$$

$$= 2 \left| \int_{\Omega} (|\psi_j^\rho|^2 u \frac{\partial u}{\partial x_1} + \psi_j^\rho \frac{\partial \psi_j^\rho}{\partial x_1} |u|^2) \, dx \right|$$

Par sommation sur  $j$ , il vient :

$$\int_{\tilde{\Gamma}_1^\rho} |u|^2 n_1 \, d\sigma \leq 2 \sum_{j=1}^{N+1} \int_{\Omega} |\psi_j^\rho|^2 |u| \frac{\partial u}{\partial x_1} \, dx + 2 \sum_{j=1}^{N+1} \int_{\Omega} |\psi_j^\rho| \frac{\partial \psi_j^\rho}{\partial x_1} |u|^2 \, dx$$

Alors en introduisant la constante :

$$(2.13) \quad C(\rho) = \max_{1 \leq j \leq N+1} \left( \max_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial \psi_j^\rho}{\partial x} \right| \right)$$

des inégalités du type Young et Cauchy-Schwartz mènent à l'estimation :

$$(2.14) \quad \left( \int_{\tilde{\Gamma}_1^\rho} |u|^2 n_1 \, d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \leq (1+C(\rho))^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^{1,0}(\Omega)}$$

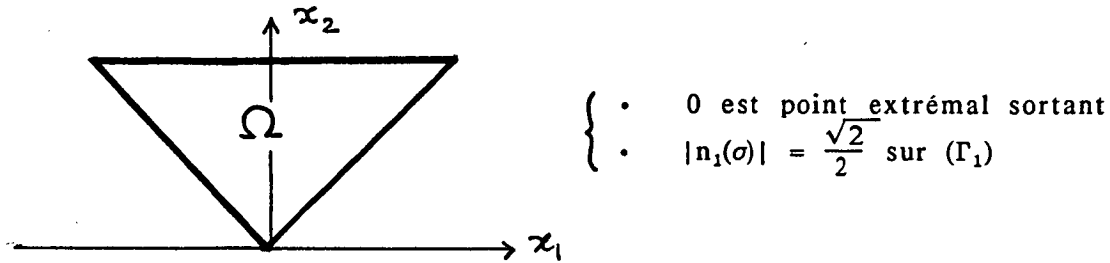
à partir de laquelle il est facile d'obtenir la première partie du lemme.

Pour ce qui concerne le résultat de surjectivité, il suffit de reprendre le raisonnement du lemme 2.1 et de relever localement dans  $\Omega$ , ce qui est possible quitte à jouer sur le paramètre  $\eta > 0$ , chacune des restrictions à  $(\tilde{\Gamma}_1^\rho)_j$  d'une fonction  $\phi$  de  $L^2(\tilde{\Gamma}_1^\rho; |n_1(\sigma)| \, d\sigma)$ .  $\square$

Comme conséquence du lemme, nous avons immédiatement le :

**COROLLAIRE 2.1** Lorsque  $\Gamma_1$  est sans points  $x_2$ -extrémaux stricts, l'application trace sur  $\Gamma_1; \gamma_0$ , est linéaire, continue et surjective de  $H^{1,0}$  dans  $L^2(\Gamma_1, |n_1(\sigma)| d\sigma)$ .

Bien entendu, dans le cas général la constante  $C(\rho)$  intervenant dans l'estimation (2.14) va exploser lorsque  $\rho \rightarrow 0$  (en effet il faut pouvoir garder les supports des fonctions  $\psi_j^\rho$  disjoints). Cela suggère que le résultat du corollaire 1.1 ne peut être étendu au cas général comme le confirme du reste le contre exemple suivant (exemple 2.2) :



Si on considère la fonction indépendante de  $x_1$

$$(2.15) \quad u_\alpha(x_1, x_2) = \frac{1}{x_2^\alpha}$$

il est élémentaire de vérifier que

$$(2.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad u_\alpha \in H^{1,0}(\Omega) \quad \Leftrightarrow \alpha < 1 \\ \bullet \quad \gamma_0 u_\alpha \in L^2(\Gamma_1, |n_1(\sigma)| d\sigma) \quad \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Pour  $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1[$ ,  $u_\alpha$  fournit donc un exemple de fonction dans  $H^{1,0}(\Omega)$  dont la trace sur  $\Gamma_1$  n'est pas dans  $L^2(\Gamma_1, |n_1(\sigma)| d\sigma)$ . Tout ceci met en lumière la nécessité d'examiner ce qui se passe au voisinage des points  $x_2$ -extrémaux stricts.

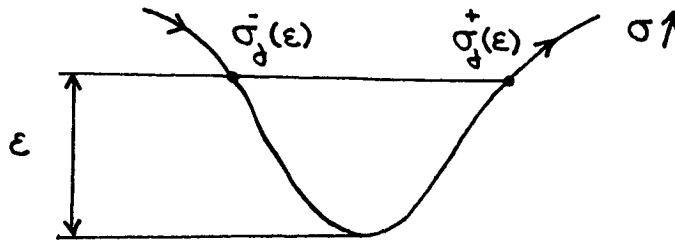
### 3 Etude des traces au voisinage des points $x_2$ extrémaux stricts

Désignons par  $\sigma_j$ , l'abscisse curviligne d'un point  $x_2$ -extrémal. Ce point étant isolé, la fonction  $\sigma \rightarrow X_2(\sigma)$  admet un extrémum relatif strict au point  $\sigma_j$  et on

en déduit aisément que, pour  $\epsilon > 0$  assez petit, il existe  $\{\sigma_j^-(\epsilon), \sigma_j^+(\epsilon)\}$  tels que par exemple lorsque  $X_2(\sigma_j)$  est un minimum :

$$\left| \begin{array}{l} X_2(\sigma) : [\sigma_j^-(\epsilon), \sigma_0] \rightarrow [X_2(\sigma_0), X_2(\sigma_0) + \epsilon] \\ \quad \text{est surjective et décroissante} \\ X_2(\sigma) : [\sigma_j^+(\epsilon), \sigma_0] \rightarrow [X_2(\sigma_0), X_2(\sigma_0) + \epsilon] \\ \quad \text{est surjective et croissante} \end{array} \right.$$

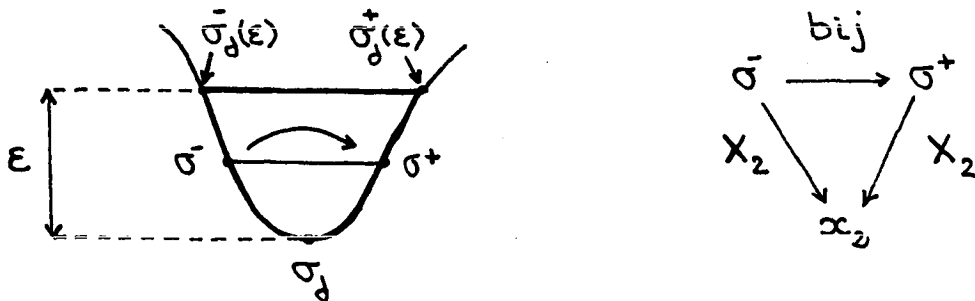
### Illustration graphique



Par conséquent, pour tout  $x_2$  dans  $[X_2(\sigma_0), X_2(\sigma_0) + \epsilon]$  il existe un couple  $(\sigma^-, \sigma^+)$  dans  $[\sigma_j^-(\epsilon), \sigma_j] \times [\sigma_j, \sigma_j^+(\epsilon)]$ , unique tel que  $X_2(\sigma^-) = X_2(\sigma^+) = x_2$ . On définit ainsi de cette manière une bijection  $\sigma^- \rightarrow \sigma^+$  de  $[\sigma_j^-(\epsilon), \sigma_j]$  dans  $[\sigma_j, \sigma_j^+(\epsilon)]$ . Nous pouvons alors associer à  $\sigma_j$  l'ouvert  $\Omega(\sigma_j, \epsilon)$  défini par :

$$\Omega(\sigma_j, \epsilon) = \{ ]M(\sigma^-), M(\sigma^+) [, X_2(\sigma^-) = X_2(\sigma^+) = x_2 \in [X_2(\sigma_j), X_2(\sigma_j) + \epsilon] \}$$

### Illustration graphique

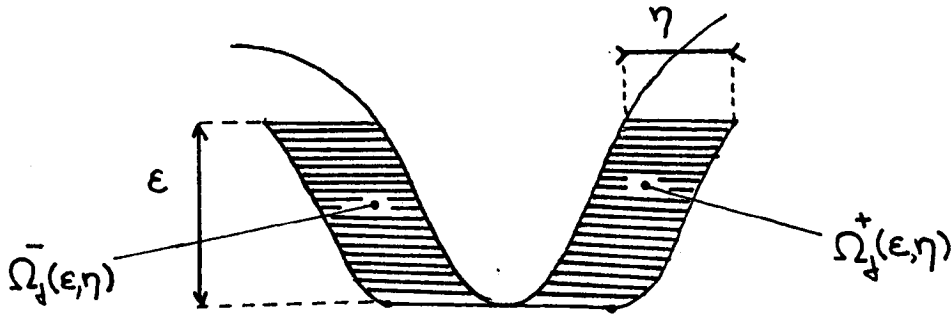


Avant posé  $V(\sigma_j, \epsilon, \eta) = ]X_1(\sigma_j) - \eta, X_1(\sigma_j) + \eta[ \times ]X_2(\sigma_j) - \epsilon, X_2(\sigma_j) + \epsilon[$ , il est clair que le point  $M(\sigma_j)$  est sortant par rapport à  $\Omega$  si et seulement si on peut trouver  $(\epsilon, \eta)$  tel que :

$$\Omega \cap V(\sigma_j, \epsilon, \eta) = \Omega(\sigma_j, \epsilon)$$

Dans le cas contraire,  $M(\sigma_j)$  est un point  $x_2$ -extrémal rentrant. Notons que, quitte à changer l'orientation de  $(\Gamma)$  (localement), nous pouvons toujours supposer que  $X_1(\sigma^+) > X_1(\sigma^-)$  dès que  $\sigma^-$  et  $\sigma^+$  sont reliés par la bijection définie plus haut. Conformément à la notation du paragraphe 1, nous désignerons par  $\Gamma_1^j(\epsilon)$  la portion de  $\Gamma$  décrite par  $M(\sigma)$  lorsque  $\sigma$  parcourt l'intervalle  $[\sigma_j^-(\epsilon), \sigma_j^+(\epsilon)]$ ;  $\Gamma_1^j(\epsilon)$  coïncide également avec la "partie  $\Gamma_1$ " de la frontière de l'ouvert  $\Omega(\sigma_j, \epsilon)$ .

Notons tout d'abord, ainsi que le lecteur s'en convaincra aisément que les points extrémaux rentrants ne jouent en fait aucun rôle. Cela est dû au fait que l'on peut promener dans  $\Omega$  un segment "horizontal" (i.e. parallèle à  $0x_1$ ) de longueur fixe, l'une extrémités du segment parcourant  $\Gamma_1^j(\epsilon)$ , comme illustré ci-après :



En effet ayant ainsi défini deux ouverts disjoints, soient  $\Omega_j^-(\epsilon, \eta)$  et  $\Omega_j^+(\epsilon, \eta)$ , inclus dans  $\Omega$ , on peut appliquer les mêmes techniques que celle des paragraphes 1 et 2. On fait intervenir les fonctions de troncature  $\Phi_\eta^+$  et  $\Phi_\eta^-$ , définies dans  $\Omega_j^+(\epsilon, \eta)$  et  $\Omega_j^-(\epsilon, \eta)$  par :

$$(2.17) \quad \Phi_\eta^\pm(X_1(\sigma) \pm \xi_1, X_2(\sigma)) = \psi^\eta(\xi_1)$$

où  $\psi^\eta$  a déjà été définie au lemme 2.1.

Pour montrer alors que la trace d'une fonction de  $H^{1,0}(\Omega)$  reste dans  $L^2(\Gamma_1^j(\epsilon), |n_1(\sigma)| d\sigma)$  on applique la formule de Green (1.9) aux fonctions  $\Phi_\eta^- u$  et  $\Phi_\eta^+ u$  lorsque  $u$  est régulière. Pour obtenir le résultat de surjectivité, on relève une

fonction  $\phi(\sigma)$  de l'espace  $L^2(\Gamma_1^j(\epsilon), |n_1(\sigma)|d\sigma)$  en relevant indépendamment  $\{\phi(\sigma), \sigma \in [\sigma_j^-(\epsilon), \sigma_j]\}$  dans  $\Omega_j^-(\epsilon, \eta)$  et  $\{\phi(\sigma), \sigma \in [\sigma_j, \sigma_j^+(\epsilon)]\}$  dans  $\Omega_j^+(\epsilon, \eta)$  par le même procédé qu'au lemme 2.1.

Ainsi, on établit que les résultats énoncés au lemme 2.2 et au corollaire 2.1 si on remplace les points  $x_2$ -extrémaux par les seuls points  $x_2$ -extrémaux sortants.

Il ne nous reste plus qu'à examiner ce qui se passe au voisinage d'un point extrémal sortant, c'est-à-dire pour l'espace  $H^{1,0}(\Omega(\sigma_j, \epsilon))$ . Nous utiliserons la fonction  $\ell_j(\sigma)$  définie au paragraphe 1 par :

$$(2.18) \quad \begin{cases} \ell_j(\sigma^-) = \ell_j(\sigma^+) = |M(\sigma^-) - M(\sigma^+)| = |X_1(\sigma^+) - X_1(\sigma^-)| \\ \text{pour } X_2(\sigma^+) = X_2(\sigma^-) = x_2 \in [X_2(\sigma_j), X_2(\sigma_j) + \epsilon] \end{cases}$$

En remplaçant au besoin  $\ell_j(\sigma)$  par  $\min \{1, \ell_j(\sigma)\}$ , nous avons les propriétés suivantes :

$$(2.19) \quad \begin{cases} \sigma \rightarrow \ell_j(\sigma) \text{ est continue} \\ \forall \sigma \neq \sigma_j, \quad \ell_j(\sigma) \in ]0, 1[ \\ \lim_{\sigma \rightarrow \sigma_j} \ell_j(\sigma) = 0 \end{cases}$$

L'exemple (2.2) suggère que le sous-espace de  $H^{1,0}$  des fonctions ne dépendant que de la variable  $x_2$  :

$$(2.20) \quad V_1 = \left\{ v \in H^{1,0}(\Omega(\sigma_j, \epsilon)) / \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0 \right\}$$

joue un rôle particulier. Il apparaît donc naturel de travailler sur la décomposition :

$$H^{1,0}(\Omega(\sigma_j, \epsilon)) = V_1 + V_1^\perp$$

ou  $V_1^\perp$  n'est autre que l'espace des fonctions de  $H^{1,0}$  dont la valeur moyenne sur chaque segment de  $[M(\sigma^-), M(\sigma^+)]$ , est nulle :

$$v \in V_1^\perp \Leftrightarrow \text{p.p. } x_2 = X_2(\sigma^-) = X_2(\sigma^+) \quad \int_{X_1(\sigma^-)}^{X_1(\sigma^+)} u(x_1, x_2) dx_1 = 0$$

En fait, pour faire apparaître plus naturellement les parties  $(\Gamma, x_1)$  paires et impaires de la trace, nous utiliserons une autre décomposition (non orthogonale) de  $H^{1,0}(\Omega(\sigma_j, \epsilon))$  :

$$(2.21) \quad H^{1,0}(\Omega(\sigma_j, \epsilon)) = V_1 + V_2$$

où  $V_2$  est défini par :

$$(2.22) \quad v \in V_2 \Leftrightarrow \text{p.p. } x_2 \in [X_2(\sigma_j), X_2(\sigma_j) + \epsilon] \quad v(M(\sigma^-)) + v(M(\sigma^+)) = 0$$

Il est facile de voir que deux fonctions appartenant respectivement à  $V_1^\perp$  et  $V_2$  diffèrent par une fonction de  $V_1$ . D'autre part, les traces de fonctions de  $V_1$  sont nécessairement  $(\Gamma, x_1)$  paires alors que celles des fonctions de  $V_2$  sont nécessairement  $(\Gamma, x_1)$  impaires (voir paragraphe 1)

### LEMME 2.3

L'application trace  $\gamma_0 : D(\overline{\Omega(\sigma_j, \epsilon)}) \rightarrow L^2(\Gamma_j(\epsilon))$  se prolonge de manière unique en une application linéaire continue et surjective de  $H^{1,0}(\Omega(\sigma_j, \epsilon))$  dans  $T(\Gamma_j(\epsilon))$ . Plus précisément,  $\gamma_0$  est linéaire continue et surjective de l'espace  $V_1$  dans l'espace  $PL^2(\Gamma_j^i(\epsilon), |n_1(\sigma)| \ell_j(\sigma) d\sigma)$  ainsi que l'espace  $V_2$  dans l'espace  $IL^2(\Gamma_j^i(\epsilon), |n_1(\sigma)| \ell_j(\sigma)^{-1} d\sigma)$

### Démonstration du lemme

#### (i) Traces des fonctions de $V_1$

Soit  $v$  une fonction de  $V_1$ , la valeur de sa trace est bien entendu déterminée par :

$$(2.23) \quad \phi(\sigma^-) = \phi(\sigma^+) = v(x_1, x_2) \text{ pour } x_2 = X_2(\sigma^-) = X_2(\sigma^+)$$

La norme de  $v$  dans  $H^{1,0}(\Omega(\sigma_j, \epsilon))$  coïncide avec sa norme  $L^2$  :

$$\|v\|_{H^{1,0}}^2 = \int_{X_2(\sigma_j)}^{X_2(\sigma_j) + \epsilon} \left( \int_{X_1(\sigma^-)}^{X_1(\sigma^+)} |v(x_1, x_2)|^2 dx_1 \right) dx_2$$

$$(2.24) \quad \int_{X_1(\sigma^-)}^{X_1(\sigma^+)} |v(x_1, x_2)|^2 dx_1 = \ell(\sigma^-) |\phi(\sigma^-)|^2 = \ell(\sigma^+) |\phi(\sigma^+)|^2$$

Par conséquent en considérant successivement les deux changements de variables

$$\begin{cases} x_2 = X_2(\sigma^-) & \sigma^- \in [\sigma_j^-(\epsilon), \sigma_j^-] \\ x_2 = X_2(\sigma^+) & \sigma^+ \in [\sigma_j^+, \sigma_j^+(\epsilon)] \end{cases}$$

Nous obtenons les deux égalités

$$(2.25) \quad \begin{cases} \int_{\sigma_j^-(\epsilon)}^{\sigma_1} |\phi(\sigma^-)|^2 \ell_j(\sigma^-) |n_1(\sigma^-)| d\sigma^- = \|v\|_{H^{1,0}}^2 \\ \int_{\sigma_j^+}^{\sigma_j^+(\epsilon)} |\phi(\sigma^+)|^2 \ell_j(\sigma^+) |n_1(\sigma^+)| d\sigma^+ = \|v\|_{H^{1,0}}^2 \end{cases}$$

Et par conséquent, l'identité

$$(2.26) \quad \frac{\|\phi\|^2}{|n_1|_{\ell_j, \Gamma_j(\epsilon)}} = 2 \|v\|_{H^{1,0}}^2$$

Il est clair que (2.26) fournit à la fois le résultat de continuité et le résultat de surjectivité pour la restriction de  $\gamma_0$  à  $v_1$ .

(ii) Traces des fonctions de  $V_2$

Soit  $v$  dans  $V_2$ , pour presque tout  $x_2$  dans  $]X_2(\sigma_j^-), X_2(\sigma_j^+)+\epsilon[$ , la fonction  $x_1 \rightarrow v(x_1, x_2)$  est dans  $H^1([X_1(\sigma^-), X_1(\sigma^+)])$  et vérifie : (si  $x_2 = X_2(\sigma^-) = X_2(\sigma^+)$ )

$$v(X_1(\sigma^-), x_2) + v(X_1(\sigma^+), x_2) = 0$$

Par conséquent, en utilisant le fait que  $H^1 \subset C^0$  en dimension 1, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que :

$$(2.26) \quad \text{p.p. } x_2, \quad \exists x_0 = x_0(\sigma^-) = x_0(\sigma^+) \in ]X_1(\sigma^-), X_1(\sigma^+)[ \quad / \quad v(x_0, x_2) = 0$$

Nous pouvons alors écrire, si  $\phi$  désigne la trace de  $v$  :



$$(2.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi(\sigma^-) = - \int_{X_1(\sigma^-)}^{x_0(\sigma^-)} \frac{\partial v}{\partial x_1} (x_1, X_2(\sigma^-)) dx_1 \quad \text{p.p. } \sigma^- \in [\sigma_j^-(\epsilon), \sigma_j] \\ \phi(\sigma^+) = \int_{x_0(\sigma^+)}^{X_1(\sigma^+)} \frac{\partial v}{\partial x_1} (x_1, X_2(\sigma^+)) dx_2 \quad \text{p.p. } \sigma^+ \in [\sigma_j, \sigma_j^+(\epsilon)] \end{array} \right.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, en utilisant le fait que, comme  $x_0(\sigma^-) = x_0(\sigma^+)$  est dans l'intervalle  $]X_1(\sigma^-), X_1(\sigma^+)[$ , les quantités  $|x_0(\sigma^-) - X_1(\sigma^-)|$  et  $|X_1(\sigma^+) - x_0(\sigma^+)|$  sont majorées par  $\ell_j(\sigma^-) = \ell_j(\sigma^+)$ , nous déduisons :

$$(2.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\phi(\sigma^-)|^2 \leq \ell_j(\sigma^-) \int_{X_1(\sigma^-)}^{X_1(\sigma^+)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} (x_1, x_2) \right|^2 dx_1 \\ |\phi(\sigma^+)|^2 \leq \ell_j(\sigma^+) \int_{X_1(\sigma^-)}^{X_1(\sigma^+)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} (x_1, x_2) \right|^2 dx_1 \end{array} \right.$$

Mais en utilisant les deux changements de variables :

$$\left| \begin{array}{ll} (x_1, \sigma^-) \rightarrow (x_1, x_2) = (x_1, X_2(\sigma^-)) & \sigma^- \in [\sigma_j^-(\epsilon), \sigma_j] \\ (x_2, \sigma^+) \rightarrow (x_1, x_2) = (x_1, X_2(\sigma^+)) & \sigma^+ \in [\sigma_j, \sigma_j^+(\epsilon)] \end{array} \right.$$

de Jacobiens respectifs  $|n_1(\sigma^-)|$  et  $|n_1(\sigma^+)|$ , nous obtenons la double égalité :

$$(2.29) \quad \left| \begin{array}{l} \int_{\Omega(\sigma_j, \epsilon)} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right|^2 dx = \int_{\sigma_j^-(\epsilon)}^{\sigma_j} \left( \int_{X_1(\sigma^-)}^{X_2(\sigma^+)} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1} (x_1, x_2(\sigma^-)) \right|^2 dx_1 \right) |n_1(\sigma^-)| d\sigma^- \\ = \int_{\sigma_j}^{\sigma_j^+(\epsilon)} \left( \int_{X_1(\sigma^-)}^{X_2(\sigma^+)} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1} (x_1, x_2(\sigma^+)) \right|^2 dx_1 \right) |n_1(\sigma^+)| d\sigma^+ \end{array} \right.$$

Par conséquent, utilisant (2.28) et (2.29), nous obtenons :

$$(2.30) \quad \left| \begin{array}{l} \int_{\sigma_j^-(\epsilon)}^{\sigma_j} |\phi(\sigma^-)|^2 \frac{|n_1(\sigma^-)|}{|\ell_j(\sigma^-)|} d\sigma^- \leq \int_{\Omega(\sigma_j, \epsilon)} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right|^2 dx \\ \int_{\sigma_j}^{\sigma_j^+(\epsilon)} |\phi(\sigma^+)|^2 \frac{|n_1(\sigma^+)|}{|\ell_j(\sigma^+)|} d\sigma^+ \leq \int_{\Omega(\sigma_j, \epsilon)} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right|^2 dx \end{array} \right.$$

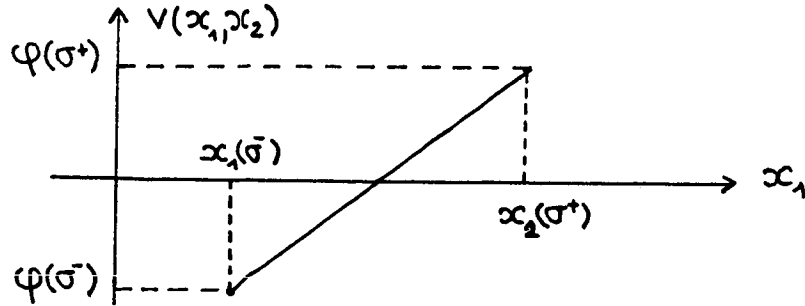
D'où nous tirons par addition

$$(2.31) \quad \|\phi\|_{|n_1|^{-1} \ell_j, \Gamma_j(\epsilon)}^2 \leq 2 \int_{\Omega(\phi_j, \epsilon)} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right|^2 dx_1 = 2 \|v\|_{H^{1,0}}^2$$

ce qui prouve la continuité de  $\gamma_0$  de  $V_2$  dans l'espace  $IL^2(\Gamma_j(\epsilon), |n_1(\sigma)| \ell_j(\sigma)^{-1} d\sigma)$ .  
Pour obtenir le résultat de surjectivité, il suffit, étant donnée une fonction  $\phi(\sigma)$  dans  $IL^2(\Gamma_j(\epsilon), |n_1(\sigma)|)$  de considérer le relèvement défini par :

$$(2.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} = 0 \quad \Leftrightarrow v \text{ affine en } x_1 \\ v(X_1(\sigma), X_2(\sigma)) = \phi(\sigma) \quad \sigma \in [\sigma_j^-(\epsilon), \sigma_j^+(\epsilon)] \end{array} \right.$$

#### Illustration graphique



Un simple calcul montre alors que :

$$(2.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int |v|^2 dx = \frac{1}{3} \int_{\Gamma_j(\epsilon)} |\phi(\sigma)|^2 |n_1(\sigma)| \ell_j(\sigma) d\sigma \\ \int \left| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right|^2 dx = \int_{\Gamma_j(\epsilon)} |\phi(\sigma)|^2 \frac{|n_1(\sigma)|}{\ell_j(\sigma)} d\sigma \end{array} \right.$$

ce qui établit le lemme

□

Pour établir le théorème 1.1 il suffit de procéder par localisation à l'aide d'une partition de l'unité et d'appliquer en fait le corollaire 2.1 et le lemme 2.3. Les difficultés sont purement techniques.  $\square$

Remarque Etant donnée une fonction dans l'espace  $TL^2(\Gamma_1^j(\epsilon))$ , la démonstration du lemme 2.3 montre qu'un relèvement dans  $H^{1,0}(\Omega(\sigma_j, \epsilon))$  est obtenue à l'aide d'une fonction affine en  $x_1$  sur chaque segment  $]M(\sigma^-), M(\sigma^+)[$ , c'est-à-dire en résolvant le problème de Dirichlet non homogène pour le laplacien transverse, dans chaque tranche  $]M(\sigma^-), M(\sigma^+)[$

## 2.2 - Preuve du théorème 2.2

Pour montrer que la limite de  $\int_{\Gamma \setminus \Gamma_1(\delta)} \phi(\sigma) \psi(\sigma) n_1(\sigma) d\sigma$  existe quand  $\delta$  tend vers 0, nous écrivons tout d'abord :

$$(2.34) \quad \left| \begin{array}{l} \forall \delta < \epsilon \\ \int_{\Gamma \setminus \Gamma_1(\delta)} \phi(\sigma) \psi(\sigma) n_1(\sigma) d\sigma = \int_{\Gamma \setminus \Gamma_1(\epsilon)} \phi(\sigma) \psi(\sigma) n_1(\sigma) d\sigma \\ + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_1^j(\epsilon) \setminus \Gamma_1^j(\delta)} \phi(\sigma) \psi(\sigma) n_1(\sigma) d\sigma \end{array} \right.$$

Il suffit donc de montrer que, pour tout  $j$  :

$$(2.35) \quad \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\Gamma_1^j(\epsilon) \setminus \Gamma_1^j(\delta)} \phi(\sigma) \psi(\sigma) n_1(\sigma) d\sigma \quad \text{existe.}$$

Notons tout d'abord que si  $\phi$  et  $\psi$  sont dans  $TL^2(\Gamma_1; \Omega)$ , l'intégrale :

$$\int_{\Gamma_1^j(\epsilon)} \phi(\sigma) \psi(\sigma) n_1(\sigma) d\sigma$$

n'est en général pas définie au sens de Lebesgue à cause de la singularité que les fonctions  $\phi(\sigma)$  et  $\psi(\sigma)$  peuvent présenter au voisinage de  $\sigma = \sigma_j$ , due au poids  $\ell_j(\sigma)$ . Mais si nous écrivons :

$$(2.36) \quad \begin{cases} \phi = \phi_i + \phi_p \\ \psi = \psi_i + \psi_p \end{cases}$$

avec  $((\phi_i, \phi_p), (\psi_i, \psi_p)) \in \left\{ L^2(\Gamma_1^j(\epsilon), |n_1(\sigma)| \ell_j(\sigma)^{-1} d\sigma) \times PL^2(\Gamma_1^j(\epsilon), |n_1(\sigma)| \ell_j(\sigma) d\sigma) \right\}^2$

Nous avons :

$$(2.37) \quad \left| \int_{\Gamma_1^j(\epsilon) \setminus \Gamma_1^j(\delta)} \phi(\sigma) \psi(\sigma) n_1(\sigma) d\sigma = \int_{\Gamma_1^j(\epsilon) \setminus \Gamma_1^j(\delta)} [\phi_i(\sigma) \psi_i(\sigma) + \phi_p(\sigma) \psi_p(\sigma)] n_1(\sigma) d\sigma \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_1^j(\epsilon) \setminus \Gamma_1^j(\delta)} [\phi_i(\sigma) \psi_p(\sigma) + \phi_p(\sigma) \psi_i(\sigma)] n_1(\sigma) d\sigma \right|$$

Pour le deuxième terme du membre de droite nous avons la majoration, par Cauchy-Schwartz :

$$(2.38) \quad \left| \int_{\Gamma_1^j(\epsilon) \setminus \Gamma_1^j(\delta)} |\phi_i(\sigma) \psi_p(\sigma) + \phi_p(\sigma) \psi_i(\sigma)| |n_1(\sigma)| d\sigma \leq \|\phi_i\|_{\Gamma_1^j(\epsilon), |n_1| \ell_j^{-1}} \|\psi_p\|_{\Gamma_1^j(\epsilon), |n_1| \ell_j} \right. \\ \left. + \|\phi_p\|_{\Gamma_1^j(\epsilon), |n_1| \ell_j} \|\psi_i\|_{\Gamma_1^j(\epsilon), |n_1| \ell_j^{-1}} \right|$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour obtenir

$$(2.39) \quad \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\Gamma_1^j(\epsilon) \setminus \Gamma_1^j(\delta)} [\phi_i(\sigma) \psi_p(\sigma) + \phi_p(\sigma) \psi_i(\sigma)] n_1(\sigma) d\sigma = \int_{\Gamma_1^j(\epsilon)} [\phi_i(\sigma) \psi_p(\sigma) + \phi_p(\sigma) \psi_i(\sigma)] n_1(\sigma) d\sigma$$

avec en outre l'estimation

$$(2.40) \quad \left| \int_{\Gamma_1^j(\epsilon)} (\phi_i \psi_p + \psi_p \psi_i)(\sigma) n_1(\sigma) d\sigma \right| \leq \|\phi\|_{TL^2(\Gamma_j(\epsilon))} \cdot \|\psi\|_{TL^2(\Gamma_j(\epsilon))}$$

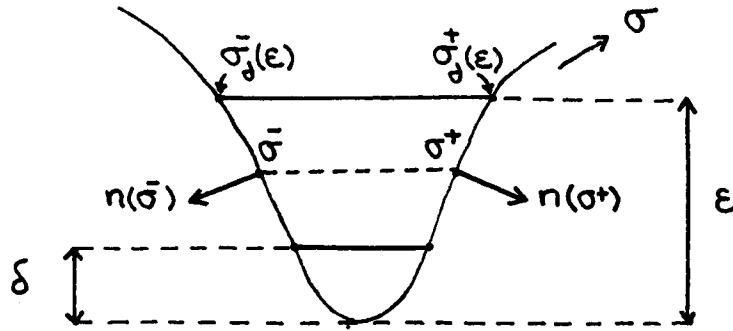
Pour le premier terme du membre de droite de l'égalité (2.37), nous remarquons que la fonction :

$$\Phi(\sigma) = \phi_i(\sigma) \psi_i(\sigma) + \phi_p(\sigma) \psi_p(\sigma)$$

est  $(\Gamma, x_1)$  paire. Supposons par exemple que  $X_2(\sigma_j)$  soit un minimum local pour la fonction  $X_2(\sigma)$  alors par une orientation convenable de  $(\Gamma)$  nous pouvons toujours supposer que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} n_1(\sigma) = \frac{dX_2}{d\sigma}(\sigma) < 0 & \text{pour } \sigma \in [\sigma_j^-(\epsilon), \sigma_j] \\ n_1(\sigma) = \frac{dX_2}{d\sigma}(\sigma) > 0 & \text{pour } \sigma \in [\sigma_j, \sigma_j^+(\epsilon)] \end{array} \right.$$

### Illustration graphique



Nous écrivons alors :

$$(2.41) \quad \int_{\Gamma_1^j(\epsilon) \setminus \Gamma_1^j(\delta)} \Phi(\sigma) n_1(\sigma) d\sigma = \int_{\sigma_j^-(\epsilon)}^{\sigma_j^-(\delta)} \Phi(\sigma) n_1(\sigma) d\sigma + \int_{\sigma_j^+(\delta)}^{\sigma_j^+(\epsilon)} \Phi(\sigma) n_1(\sigma) d\sigma$$

En faisant dans chacune des intégrales les changements de variable :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_2 = X_2(\sigma^-) & \text{si } \sigma^- \in [\sigma_j^-(\epsilon), \sigma_j^-(\delta)] \\ x_2 = X_2(\sigma^+) & \text{si } \sigma^+ \in [\sigma_j^+(\delta), \sigma_j^+(\epsilon)] \end{array} \right.$$

On obtient, compte tenu du fait que  $n_1(\sigma)$  change de signe :

$$\int_{\Gamma_1^j(\epsilon) \setminus \Gamma_1^j(\delta)} \Phi(\sigma) n_1(\sigma) d\sigma = \int_{X_2(\sigma_j)+\delta}^{X_2(\sigma_j)+\epsilon} [\Phi(\sigma^+) - \Phi(\sigma^-)] dx_2$$

Mais,  $\phi$  étant  $(\Gamma, x_1)$  paire  $\Phi(\sigma^+) - \Phi(\sigma^-) = 0$  pour tout  $x_2$  de telle sorte que en fait :

$$(2.42) \quad \int_{\Gamma_1^j(\epsilon) \setminus \Gamma_1^j(\delta)} (\phi_1(\sigma)\psi_1(\sigma) + \phi_p(\sigma)\psi_p(\sigma)) n_1(\sigma) d\sigma = 0 \quad \forall \delta < \epsilon$$

Joint à (2.39), ce résultat prouve que la limite cherchée existe bien et est donnée par :

$$(2.43) \quad \text{v.p. } x_2 \quad \int_{\Gamma_1^j(\epsilon)} \phi(\sigma)\psi(\sigma)n_1(\sigma)d\sigma = \int_{\Gamma_1^j(\epsilon)} (\phi_1(\sigma)\psi_p(\sigma) + \phi_p(\sigma)\psi_1(\sigma)) n_1(\sigma) d\sigma$$

En outre, l'inégalité (2.40) prouve que la forme bilinéaire

$$(\phi, \psi) \rightarrow \text{v.p. } x_2 \quad \int_{\Gamma_1^j(\epsilon)} \phi(\sigma) \psi(\sigma) n_1(\sigma) d\sigma$$

est continue sur  $T(\Gamma_1^j(\epsilon))$ .

Le résultat général est alors une conséquence de l'égalité (2.34). Pour obtenir la formule (1.11), il suffit alors de passer à la limite dans la formule de Green (1.9) pour une suite  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$  dans  $D(\bar{\Omega})^2$  convergeant vers  $(u, v)$  dans  $H^{1,0}(\Omega)$  et d'utiliser la continuité des formes bilinéaires :

$$(u, v) \rightarrow \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} v + u \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) dx$$

$$(\phi, \psi) \rightarrow \text{v.p. } x_2 \quad \int_{\Gamma_1} \phi(\sigma) \psi(\sigma) n_1(\sigma) d\sigma$$

respectivement dans  $H^{1,0}(\Omega)$  et dans  $T(\Gamma_1, \Omega)$ . □

### III - CONCLUSION

Le résultat que nous avons obtenu a le mérite d'être optimal dans la mesure où nous avons, outre le résultat de continuité, un résultat de surjectivité. En outre ce résultat semble assez original et inattendu et a conduit à l'introduction de notions -fonctions  $(\Gamma, x_1)$  paires ou impaires, valeur principale selon  $x_2$  d'une intégrale curviligne- qui, bien que simples semblent, à notre connaissance, nouvelles. Deux axes de poursuite de ce travail apparaissent assez naturels :

- Obtenir des résultats, tout en restant en dimension 2, sur les espaces d'ordre supérieur

$$H^{r,s}(\Omega) = \{v / \frac{\partial^k v}{\partial x_1^k} \in L^2(\Omega) \ \forall \ k \leq r, \ \frac{\partial^p v}{\partial x_2^p} \in L^2(\Omega), \ \forall \ k \leq s\}$$

- Généraliser les résultats obtenus dans cet article en dimension strictement supérieure à 2. Par exemple, en dimension 3, à l'espace :

$$H^{1,1,0}(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : (-\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}) \in L^2(\Omega)\}$$

qui est l'espace qui apparaît naturellement lorsque l'on considère par exemple l'approximation parabolique de l'équation des ondes dans  $\mathbb{R}^3$ .

C'est cette dernière généralisation qui semble être le prolongement le plus direct du présent travail. Notre impression est que la majeure partie des notions et des idées nécessaires à cette généralisation sont déjà contenues dans le cas bidimensionnel (il faudra étendre les notions de points extrémaux, fonctions  $(\Gamma, x_2)$  paires, ....etc....). Toutefois le résultat auquel on doit aboutir n'est pas nécessairement évident. Pour s'en convaincre il suffit de noter que pour presque toute courbe "horizontale"  $(C)$  (intersection de la frontière  $(\Gamma)$  avec un plan  $x_3 = \text{cste}$ ), la trace d'une fonction de  $H^{1,1,0}(\Omega)$  aura la régularité  $H^{\frac{1}{2}}(C)$  ...

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] **ADAMS** : *"Sobolev spaces"* Academic press, New York (1975).
- [2] **A. BAMBERGER., B. ENGQUIST., L. HALPERN., P. JOLY** : *"Parabolic wave equation approximation in heterogeneous media"* Rapport INRIA n°557(1986), to appear in SIAM J. on Applied Math.
- [3] **A. BAMBERGER., B. ENGQUIST., L. HALPERN., P. JOLY** : *"Higher order wave equation approximation in heterogeneous media"* Rapport INRIA n°558 (1986), to appear in SIAM J. on Applied Math.
- [4] **O. BESOV., V. IL'JIN., S. NIKOL'SKI** : *"Integral representations of functions and imbedding theorems"* Vol. 1 Scripta Series in Mathematics, Winston and Sons, Washington (1978).
- [5] **P. JOLY** : *"Etude mathématique de l'approximation parabolique de l'équation des ondes en milieu stratifié"* Rapport INRIA n°229 (1984).
- [C] **P. JOLY** : *"Analyse numérique et mathématique de problèmes liés à la propagation d'ondes acoustiques, élastiques et électromagnétiques"* Thèse d'Etat-Université Paris Dauphine (1987).
- [7] **P. JOLY** : *"Régularité et non régularité des solutions des approximations paraxiales de l'équation des ondes en milieu hétérogène"*, Rapport INRIA à paraître.
- [8] **J.L. LIONS., E. MAGENES** : *"Problèmes aux limites non homogènes et applications"* Vol. I et II - DUNOD (1968).
- [9] **F. NATAF** : Thèse à paraître - Université Paris VI.
- [10] **J. NECAS** : *"Methodes directes en théorie des équations elliptiques"* Masson, Paris (1967).
- [11] **R. TEMAM** : *"Sur la convergence de la méthode des pas fractionnaires"* Thèse d'Etat. Université de Paris (1971).



